Modelación matemática de cargas sobre una superficie alar

Mathematical modelling of loads on a wing surface

Fechas de recepción: 21 de julio de 2015
Fecha de aprobación: 30 de julio de 2015

POR: DIEGO GERARDO ROLDAN JIMENEZ*

Resumen

En este artículo se presentará un problema de tecnología aeronáutica donde se determinan diferentes cargas sobre una superficie alar. Se introducirá un proceso típico de cinco pasos en modelación matemática para determinar las ecuaciones que describen las cargas. El uso de paquetes simbólicos es mencionado en esta aplicación, y se muestra como pueden ser utilizados para evitar cálculos complicados. Adicionalmente, se obtuvo una expresión general que determina la distribución de cargas sobre una estructura alar. Finalmente, a través del método gráfico se halla una solución que permite dar una idea de la distribución de cargas con unos parámetros determinados.

PALABRAS CLAVES: Modelación Matemática, Optimización.

Abstract

This article presents a problem on aviation technology where different loads on a wing surface are determined. A typical five-step process in mathematical modelling will be introduced to determine the equations describing the loads. The use of symbolic packages is mentioned in this application, as well as its use in order to avoid complicated calculations. Additionally, a general expression that determines the distribution of loads on a wing structure was obtained. Finally, through the graphical method a solution that allows to give an idea of the distribution of loads particular parameters was found.

Keywords: Mathematical modelling, optimization.

* Matemático, Pd Eng (c) Matemáticas para la Industria, Universidad Tecnológica de Eindhoven. Eindhoven, Los Paises Bajos. Correo electrónico: d.g.roldan.jimenez@tue.nl

Introducción

Los problemas de optimización son quizá los mas frecuentes en las matemáticas aplicadas. Existen diferentes situaciones en la aeronáutica donde se pueden encontrar, por ejemplo, si se quieren minimizar costos de operación y mantenimiento en un taller aeronáutico, o si se quiere minimizar el tiempo de espera para abordar una aeronave, o si se quiere encontrar la mejor tarifa en la venta de tiquetes hacia un destino. Estos problemas clásicos tienen en común el hecho de que existen variables que se pueden controlar, y en ocasiones, como en este articulo, su complejidad se puede reducir al estudio de solo una variable. Los problemas de optimización buscan a partir de variables de entrada, determinar la mejor respuesta, con base en condiciones impuestas por el problema.

Se presentará una breve introducción a la modelación matemática através de un problema de optimización en una sola variable con aplicaciones en la tecnología aeronáutica. Este ejercicio puede ser utilizado en cursos de calculo diferencial en la escuela y brinda un complemento a la enseñanza tradicional de las matemáticas en el aula. Extensiones de este modelo, pueden ser discutidos sin ninguna dificultad, sin embargo aquí nos limitaremos al estudio de una sola variable.

Existen diferentes enfoques para hacer modelación matemática . Todos ellos siguen una estructura, paso a paso, donde hay ligeras variaciónes en la cantidad de pasos y en el detalle de los mismos. Aquí introduciremos uno de ellos, quizá el mas simple, aun asi conserva los fundamentos y la esencia del proceso de modelación. Este proceso de modelación matemática empieza con una situacion real, que necesita ser observada y simplificada, después de todo, un modelo matematico ofrece una aproximación confiable a la realidad. Durante esta simplificación, se necesitan hacer suposiciones razonables sobre el fenómeno, y asi mismo indentificar parámetros y variables (Meerschaeert, 2013). En este ejercicio, la habilidad en el dominio de terminología en matemáticas puede ser una gran ayuda. Se debe plantear las suposiciones en términos de dichas variables, y plantear claramente la pregunta, tanto en palabras como en términos matematicos.

El siguiente paso es seleccionar el enfoque matematico, o en otras palabras, elegir las matemáticas que pueden ser útiles para solucionar el problema. Por ejemplo, si se esta hablando de determinar máximos y mínimos, la optimización matemática puede ser una excelente alternativa.
Plantear el modelo es el siguiente paso. Aquí se necesita considerar la pregunta hecha en el paso uno, y replantearla de acuerdo al enfoque elegido en el paso 2. El siguiente paso es resolver el modelo utilizando técnicas disponibles para trabajar problemas propuestos por las matemáticas elegidas en el segundo paso.

El paso final es responder la pregunta propuesta en el paso uno. Después de este proceso, es conveniente realizar pruebas que permitan determinar la veracidad del modelo, ya sea realizando variación de parámetros en el mismo y observando sus resultados. Como este articulo pretende mostrar el proceso de modelación matemática, a través de un problema que surge desde la aeronáutica, nos limitaremos a introducir el proceso de cinco pasos, y no desarrollaremos un análisis posterior. Sin embargo, existe gran variedad de artículos y libros disponibles para análisis posteriores, alguno de ellos estan citados en las referencias, y para el lector interesado se sugiere la consulta adicional. Resumiendo, los pasos a seguir en modelación matemática son:

1. Formular la pregunta
2. Elegir el enfoque matematico
3. Formular el modelo
4. Solucionar el modelo
5. Responder la pregunta.

El problema original, surge desde una situación propuesta por tecnólogos aeronáuticos. Dada una aeronave, se quiere determinar el punto sobre un ala donde la distribución de cargas es máxima, dadas unas características especiales. Se supondrá que el ala es de tipo flecha (**Figura 1**), y que la distribucion de cargas sobre la misma es eliptica. Esta suposición puede modificarse, a una distribución netamente lineales, sin embargo, por la distribución geométrica del ala y por cuestiones aerodinámicas, la distribución lineal es poco realista. La carga causada por el peso de la estructura alar será proporcional a la cuerda del ala, donde en la raiz será mayor y disminuirá hacia la punta del ala. Esto puede asumirse por la geometría alar.

En cuanto a la carga causada por el tanque de combustible, podemos asumir que solo será causada en una parte de la longitud total del ala, ya que el tanque no se extiende a lo largo de la misma, y también será proporcional al ancho del tanque. Adicionalmente, podemos suponer que la aeronave bajo estudio es pequeña, y tiene un tanque de combustible en cada ala.

Modelo

Es importante hacer una lista de variables y parámetros que se encuentren en el modelo, incluyendo unidades apropiadas. Así mismo, listar todas las suposiciones hechas sobre esas variables y determinar el objetivo del modelo en términos matemáticos. A continuación, se muestran las variables, parámetros, suposiciones y objetivo.

Variables y Parámetros:

$x :=$ Posicion a lo largo del ala (m)

$L :=$ Longitud del ala (m)

$q_l :=$ Cargas debido a la sustentacion (N)

$q_w :=$ Cargas debido al peso de la estructura alar (N)

$q_f :=$ Cargas debido al peso del tanque de combustible (N)

$q_t :=$ Cargas total (N)

$c_l :=$ Coeficiente de Lift (N m)

$c_w :=$ Coeficiente del peso alar (N m)

$c_w :=$ Constante asociada al tanque de combustible (N m)

$\eta :=$ Factor de Carga

$W_{To} :=$ Peso total de la aeronave (Kg)

$W_w :=$ Peso total del ala (Kg)

$W_f :=$ Peso del tanque de combustible (Kg)

$L_f :=$ Longitud del tanque de combustible (m)

$C_o :=$ Longitud de la cuerda en la raiz del ala (m)

$C_t :=$ Longitud de la cuerda en la punta del ala (m)

$C_{of} :=$ Ancho del tanque de combustible en la raiz del ala (m)

$C_{tf} :=$ Ancho del tanque de combustible en L_f (m)

Suposiciones:

$$q_l = c_l\sqrt{L^2 - x^2}$$

$$q_w = c_w\left(C_o - \left(\frac{C_o - C_t}{L}\right)x\right)$$

$$q_f = \begin{cases} 0 & \text{si } L_f < x \\ c_f\left(C_{of} - \left(\frac{C_{of} - C_{tf}}{L}\right)x\right) & \text{si } L_f \geq x \end{cases}$$

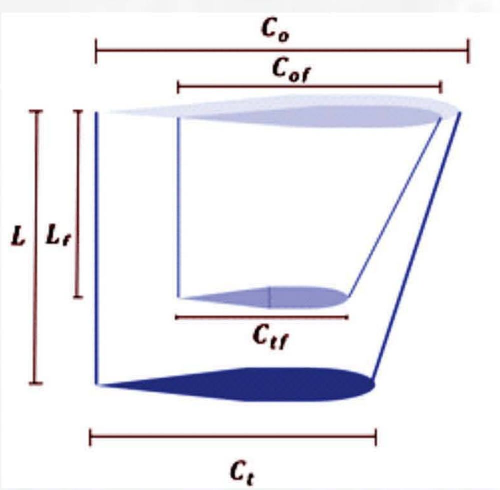
$$q_t = q_l + q_w + q_f$$

$$0 \leq x \leq L$$

Objetivo:

Encontrar el maximo de q_t

Figura 1. Dimensiones del ala y el tanque de combustible



Fuente: Propia

Para estar seguros de las unidades es importante verificar las unidades en las ecuaciones, para verificar que las ecuaciones tienen sentido. Por ejemplo, para q y q se tendrá:

$$(q_l\,\mathrm{N}) = (c_l\,\mathrm{N/m})\sqrt{(L\mathrm{m})^2 - (x\mathrm{m})^2}$$

$$(q_t\,\mathrm{N}) = (q_l\,\mathrm{N}) + (q_w\,\mathrm{N}) + (q_f\,\mathrm{N})$$

En este momento, tenemos el problema en términos matemáticos y necesitamos elegir las matemáticas adecuadas para solucionar este problema. Es claro que queremos hallar una carga máxima sobre el ala, por lo tanto estamos hablando de un problema de optimización, en particular optimización en una variable. Se plantea el enfoque que se va a tomar para solucionar este problema, más detalles se pueden encontrar en (Stewart, 2012).

Si tenemos una función real $y=f(x)$ diferenciable y definida sobre un subconjunto de la recta real A, se sabe por un teorema fundamental que si el máximo o el mínimo de la función esta en un punto x al interior de A entonces $f'(x)=0$. De forma que si dentro de A hay puntos que no satisfacen la condición, ellos serán descartados del análisis.

Ahora lo que tenemos que hacer es formular el modelo. Es bueno tener conocimiento alguno de la información disponible para solucionar el problema. En la lista de variables y parámetros se introdujo algunos parámetros sobre los cuales no hay certeza total. Nos referimos a los coeficientes de lift, peso alar y la constante asociada al tanque de combustible. La introducción de estos términos ayudó en el balance de las unidades de nuestras suposiciones, y tienen un significado físico que no será descrito en detalle. Sin embargo, podemos utilizar elementos de la teoria aerodinámica para nuestro beneficio.

Sabemos que el $Lift$ se puede obtener integrando q_l a o largo de todo el ala. En términos matemáticos:

$$Lift = \int_0^L q_l\,dx = \int_0^L c_l\sqrt{L^2 - x^2}$$

Y también se sabe desde la teoría del diseño aeronáutico que $=Lift/\,W_{To}$ Por lo tanto,

$$\int_0^L c_l\sqrt{L^2 - x^2} = \frac{\eta W_{To}}{2}$$

e integrando:

$$\frac{\pi c_l L^2}{4} = \frac{\eta W_{To}}{2}$$

y desarrollando para c_l se tendrá:

$$c_l = \frac{2\eta W_{To}}{\pi L^2}$$

Finalmente, se reemplaza en q_l y la expresión de cargas respecto a la sustentación está dada por:

$$q_l(x) = \frac{2\eta W_{To}\sqrt{L^2 - x^2}}{\pi L^2}$$

Para simplificar el problema, se puede incluir una restricción adicional y es suponer que la aeronave tiene un factor de carga igual a uno, o en otras palabras que estamos considerando la situación donde la aeronave está en un vuelo recto y nivelado. En este caso, tendremos:

$$q_l(x) = \frac{2W_{To}\sqrt{L^2 - x^2}}{\pi L^2}$$

Podemos utilizar un argumento semejante para q_w:

$$\int_0^L q_w dx = \int_0^L c_w\left(C_o - (\frac{C_o - C_t}{L})x\right) = \frac{\eta W_w}{2}$$

y así:

$$c_w = -\frac{\eta W_w}{L(C_o + C_t)}$$

por lo tanto:

$$q_w = -\frac{\eta W_w(C_o - \frac{x(C_o - C_t)}{L})}{L(C_o + C_t)}$$

Matemática Simbólica

Estos cálculos pueden ser algo engorrosos si se hacen manualmente. Por fortuna existen diferentes paquetes informáticos que pueden ayudar a simplificar la tarea, por ejemplo está Mathematica, o Matlab con su paquete de programación símbolica Mupad (Brian, Ronald, Rosenberg, 2014). Existen algunas versiones a bajo costo que pueden ser accequibles a estudiantes (Doherty,2009). También hay opciones gratuitas como Scilab, con el complemento Scimax, que requiere la instalación de otro software muy popular conocido como Maxima. Para calcular q_f se utilizó el paquete simbolico de Matlab:

Sabemos que:

$$q_f = \begin{cases} 0 & \text{si } L_f < x \\ c_f\left(C_{of} - (\frac{C_{of} - C_{tf}}{L})x\right) & \text{si } L_f \geq x \end{cases}$$

Entonces para valores de $x > L_f$ no tenemos que preocuparnos. Sin embargo para $x < L_f$ se pueden seguir los comandos descritos en la Figura 2.

Figura 2. Paquete simbólico de Matlab (Mupad). Instrucciones para hallar

```
q_f:= x-->cf*(Cof-x*(Cof-Ctf)/L)
```

$$x \to cf\left(Cof - \frac{x\,(Cof - Ctf)}{L}\right)$$

```
PesoTanque:= int(q_f(x),x=0..L)
```

$$\frac{L\,cf\,(Cof + Ctf)}{2}$$

```
eq:=n*Wf/2=PesoTanque
```

$$\frac{Wf\,n}{2} = \frac{L\,cf\,(Cof + Ctf)}{2}$$

```
cf:=-solve(eq,cf) assuming L>0 and Cof+Ctf>0
```

$$\left\{-\frac{Wf\,n}{L\,(Cof + Ctf)}\right\}$$

Fuente: Propia

y reemplazando c_f en q_f se tendrá:

$$q_f = \begin{cases} 0 & \text{si } L_f < x \\ \dfrac{-\eta W_f\left(C_{of} - (\frac{C_{of} - C_{tf}}{L})x\right)}{L(C_{of} + C_{tf})} & \text{si } L_f \geq x \end{cases}$$

Por lo tanto la carga total q_t está dada por la siguiente expresión:

$$q_t(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta(2W_{To}(C_o + C_t)\sqrt{L^2 - x^2} + \pi W_w((C_o - C_t)x - C_o L))}{L^2\pi(C_o + C_t)} & \text{si } L_f < x \\ \dfrac{2W_{To}\eta\sqrt{L^2 - x^2}}{L^2\pi} - \dfrac{W_w\eta(C_t x - C_o x + C_o L)}{L^2(C_o + C_t)} - \dfrac{W_f\eta(C_{tf}x - C_{of}x + C_{of}L_f)}{L_f^2(C_{of} + C_{tf})} & \text{si } L_f \geq x \end{cases}$$

Resultados

La anterior expresión está presentada en su forma más natural. Sin embargo, para hallar el máximo de esta función, sería de gran ayuda el disponer de datos que nos permitan de alguna forma visualizar el comportamiento de la misma. Es por esto, que dijimos que estabamos considerando una aeronave pequeña, y para este tipo de aeronaves unos parámetros apropiados podrían ser:

$$W_{To} := 4800Kg$$

$$W_w := 600Kg$$

$$W_f := 650Kg$$

$$L := 7m$$

$$L_f := 3m$$

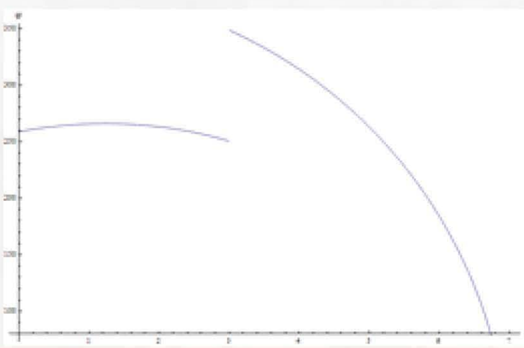
$$C_o := 1.8m$$

$$C_t := 1.5m$$

$$C_{of} := 1.1m$$

$$C_{tf} := 0.85m$$

La Figura 3 muestra como cambia el valor de qt a lo largo del eje x.



Fuente: Propia

La figura muestra claramente que hay un salto significativo en $x=Lf$. En efecto, esto se debe al diseño de la aeronave. Por lo tanto hay que tener en cuenta distintas caracteristica propias de la aeronave, entre ellas los materiales y la resistencia de los mismos, ya que la carga en este punto puede ser peligrosa debido al diferencial de más de 100 Newtons. A esto hay que sumar el hecho de que se consideró un factor de carga igual a uno.

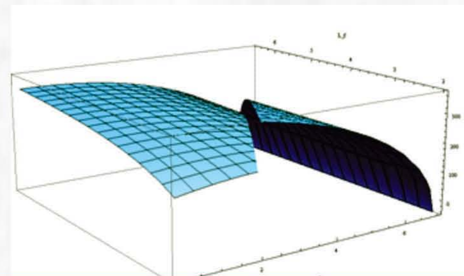
En cuanto a la respuesta de cual es la máxima carga, evidentemente desde la figura se observa que corresponde al valor de:

Figura 4. Ampliación sobre $x=3$

Fuente: Propia

Por último, por cuestiones de diseño, es posible que las dimensiones del tanque de combustible cambien pero los pesos se mantengan. Sin embargo, hay inquietud en cuanto a la distribución de cargas para diferentes dimensiones. En este caso, una gráfica de la función $qt(x,Lf)$ es de bastante utilidad porque se puede observar la evolución de las cargas a medida que la longitud del tanque cambia.

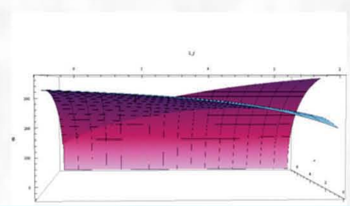
Figura 5. Distribución de cargas para distintos valores de Lf



Fuente: Propia

Si se quisiera determinar, la longitud Lf donde la carga en la parte complementaria del ala es igual a la carga de la raíz, una aproximacion puede ser através de la vista lateral de esta imagen. Se nota que en $Lf=4.5$ la carga del máximo es igual a la carga de la raíz.

Figura 6. Vista en el plano L_f, q_t



Fuente: Propia

Conclusiones

El proceso de modelación matemática es muy útil como estrategia para resolver problemas en diferentes disciplinas, incluyendo la tecnología aeronáutica. A través de un sencillo problema de distribución de cargas, se pudo observar como a través de la estrategia de los cinco pasos, se pudo hallar una expresión general de cargas sobre una superficie alar.

Esta expresión, puede ser utilizada para distintas aeronaves con distintos parámetros y dimensiones. Las suposiciones de cargas elípticas pueden ser ligeramente modificadas teniendo en cuenta la geometria alar. Esta distribución de cargas pueden ser halladas desde datos obtenidos experimentalmente sobre la estructura alar.

En el desarrollo de las ecuaciones, algunos pasos pueden ser complejos y susceptibles a errores, por lo tanto el uso de software con paquetes simbólicos como Mupad, son una alternativa a considerar. Existen paquetes estudiantiles a muy bajo costo para aquellos que estén interesados en este tipo de problemas.

Adicionalmente, las gráficas fueron construidas con otro software llamado Mathematica, que permite un rápido análisis sobre las curvas a estudiar. El método grafico que se mencionó, solo permite tener una idea de cómo es el comportamiento de la solución y no debe ser utilizado si se requieren un análisis profundo en problemas que requieran un cierto grado de exactitud.

Todos los modelos matemáticos deben ser validados y verificados, la verificación se realiza a través del modelador que fija soluciones que puedan ser utilizadas como punto de referencia y con modificaciones sobre parámetros del modelo, analiza los nuevos resultados y concluye si estos tienen sentido. Esto le brinda criterios para saber si el modelo matemático es apropiado o no. Adicionalmente, análisis de sensibilidad deben realizarse junto a la verificación para identificar parámetros sensibles y hallar la robustez en el modelo planteado. En cualquier caso si el modelo es capaz de describir el fenómeno para el cual fue creado y está dentro de los alcances del mismo, este se considera un modelo apropiado.

Referencias

- Brian R, Ronald L, Rosenberg J. (2014) A guide to MATLAB: For beginners and experienced users. Cambridge University Press
- Doherty D. (2009) Analytical Modeling of Aircraft Wing Loads using Matlab and Symbolic Matlab Toolbox. Matlab Digest, The Math-Works.
- Meerschaeert M. (2013) Mathematica Modeling, Academic Press.
- Stewart J. (2012) Cálculo, Brooks Cole Cengage Learning, Séptima edición.