



PUNTOS MATEMÁTICOS DE LA MÚSICA

Mathematical Points of Music

TJ. CARLOS ARTURO FORERO FARFÁN

Músico, Profesor Militar, Especialista en Operaciones Sicológicas, Historiador y Escritor.

E-mail: cafofa5@yahoo.es

Fecha de Recepción 24 de mayo de 2013

Fecha de Aprobación: 24 de mayo de 2013

“La música es la aritmética de los sonidos, como la óptica es la geometría de la luz”.

Claude Debussy

ABSTRACT

Music as well as mathematics has a very closer relationship, because mathematics studies the properties and relationships between abstract entities, as Albert Einstein defined “when mathematics laws refer to reality, they are no exact; when they are exact, they do not refer to reality”, equally in connection with music, it cannot refer tangentially or take and explain it, but we know that it exists thanks to our intellect through our senses.

Key Words:

Musical notes, eight, musical cord, tuning, interval, tone, semitone, geometry progression, frequency, Hertz, MIDI system, conventional system, equation, piano, infrasounds and ultrasounds.

RESUMEN

La música al igual que la matemática tiene una relación muy estrecha, ya que la matemática estudia las propiedades y relaciones entre entes abstractos, tal como definió Albert Einstein “cuando las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son exactas; cuando son exactas, no se refieren a la realidad”, igualmente con relación a la música, no se puede de forma tangencial coger o explicarla pero sabemos que existe gracias a nuestro intelecto a través de los sentidos.

Palabras claves

Notas musicales, octava, acorde, afinación, intervalo, tono, semitono, progresión geométrica, frecuencia, Hertz, sistema MIDI, sistema convencional, ecuación, piano, infrasonidos y ultrasonidos.

En música existen una serie de sonidos a diferentes alturas o frecuencias, denominados “notas musicales”, estos vitales elementos, previamente a una interpretación deben ser llevados a punto o afinados, ya que si ello no se llevare a cabo podemos caer en no llegar a determinar qué tipo de nota es la que se está emitiendo, a pesar de estar ejecutando una posición determinada en el instrumento; pues bien, ahora iniciaremos un viaje por las matemáticas aplicadas a la música, partiendo de la premisa “Lo que no se pueda demostrar matemáticamente en el universo, simplemente no existe”.

Dentro de los sistemas de afinación más conocidos tenemos el denominado “Pitagórico” (antiguo), el “Justo” (intermedio) y el “Igualmente Temperado” el cual se basa en desarrollar una progresión geométrica para instaurar las frecuencias de las notas, de modo que la frecuencia imprescindible de una nota siempre se obtiene como la frecuencia de la nota anterior multiplicada por un factor constante, de acuerdo a lo anteriormente expuesto se permite que la relación geométrica de frecuencias para los intervalos se mantenga constante pese a cualquier transporte, trasposición o modulación que se haga ; pero también existen otros sistemas que combinan ventajas y desventajas con respecto a los anteriores, como lo son los sistemas de medio tono en cuarto de coma o en otras fracciones de coma o los que vinculan sistemas irregulares llamados “Bien Temperados”.

A1. En la música occidental moderna se emplea el **esquema de doce notas por octava, donde la frecuencia se duplica cada doce notas** y la designación básica se mantiene en la octava siguiente.

En la siguiente tabla se evidencia lo anteriormente expuesto:

Tabla 1.

No. De Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de la Nota	DO	DO#	RE	RE#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI
		REb		Mib			SOLb		LAB		Sib	
Notación Americana	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
		Db		Eb			Gb		Ab		Bb	

Teniendo en cuenta que el sostenido (#) aumenta ½ tono y el bemol (b) disminuye ½ tono, podemos asegurar que SI# = DO, DOb = SI, MI# = FA, y FAB = MI.

De acuerdo a la tabla, se designa al número de nota relativo dentro de una octava como “N”, y al número de octava como “O” (numerando desde el cero); unido al párrafo A1 se puede definir un **número de nota absoluto “n”**.

$$\text{Ecuación 1: } n = N + 12 \cdot O$$

A2. El número absoluto de nota “n”, oscila entre 0 y 127 además se utiliza para la simetría de números a notas en el sistema MIDI (Musical Instrument Digital Interface). En este esquema, a la nota LA (440) que es la nota de la octava número 5 para el sistema MIDI, le pertenece el número n=69 de acuerdo a la aplicación de la ecuación 1, entonces $9 + (12.5) = 69$.

Acorde a lo observado en el párrafo A1 y recordando la expresión del Término Enésimo de una Serie Geométrica, se puede establecer:

$$\text{Ecuación 2: } f_n = f_o \cdot q^n$$

De acuerdo a lo enunciado en el párrafo A1, puede deducirse el valor que corresponde al Factor o razón geométrica “q”, debido a esto la frecuencia debe duplicarse al aumentar “n” en 12.

$$f_{n+12} = 2 \cdot f_n$$

Entonces y aplicando entonces la ecuación 2 a ambos miembros de esta y despejando ...

$$f_o \cdot q^{(n+12)} = 2 \cdot f_o \cdot q^n \rightarrow f_o \cdot q^n \cdot q^{12} = f_o \cdot q^n \cdot 2 \rightarrow q^{12} = 2$$

Y se obtiene:

$$\text{Ecuación 3: } q = 2^{1/12}$$

Que es lo mismo que $q = \sqrt[12]{2} = 1,059463\dots$

Este es el factor que aplicado a la frecuencia de una nota, origina la frecuencia de la siguiente, separada en lo que se conoce como intervalo de un semitono. Un semitono representa entonces una variación de frecuencia muy ligeramente inferior a un 6% (5,9463...%).

En última instancia, resta determinar el valor de “fo” que sería el valor de la frecuencia correspondiente a la nota n=0. Esto se logra por convención de la nota “LA” de la octava 5 en el sistema MIDI (n=69 en MIDI) y se le asigna un valor de frecuencia de 440 ciclos por segundo.

Utilizando las ecuaciones 2 y 3 y despejando...

Ecuación 4

$$440 \text{ ciclos/segundo} = f_0 \cdot 2^{69/12} \rightarrow f_0 = 440 \cdot 2^{-69/12} \cdot \text{ciclos/segundo}$$

Esto arroja un valor para $f_0 = 8,1758 \text{ ciclos/segundo}$ (lo que equivale a un infrasonido).

Ahora, reemplazando los valores correspondientes a las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 2, se puede escribir aproximadamente la ecuación de la frecuencia en ciclos/segundo (o Hertz) en función del número absoluto de nota “n” del sistema MIDI como:

Ecuación 5:

$$f_n = 8,1758 \cdot 1,059463^n \cdot \text{ciclos/segundo}$$

Aplicada para cálculos rápidos sin precisión o se puede reemplazar las expresiones de las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 2, operando un poco para obtener la correspondiente expresión formal:

Ecuación 6:

$$f_n = 440 \cdot 2^{(n-69)/12} \cdot \text{ciclos/segundo}$$

Expresión exacta de la frecuencia para la nota “n” en el sistema MIDI.

Siendo prácticos utilizaremos el número de nota relativo “N” (número de la tabla 1 dentro de una

octava determinada) unido con el número de octava “O” correspondiente.

Ahora se puede reemplazar “n” de la ecuación 6 por la expresión de la ecuación 1, operando algunas simplificaciones, para obtener la ecuación matricial de la frecuencia en función de “N” y de “O”.

Ecuación 7:

$$f_{N,O} = 440 \cdot 2^{(O - \frac{69-N}{12})} \cdot \text{ciclos/segundo}$$

Válida para el número de octava “O” del sistema MIDI.

Con ello puede obtenerse una tabla de valores de frecuencia en ciclos por segundo como la siguiente, con el número de nota relativo “N” como en la tabla 1 como cabeza de filas y número de octava “O” del sistema MIDI como cabeza de columnas.



Tabla 2 Frecuencia de las notas en ciclos/segundo o (Hertz) para el sistema MIDI.

Nota	"N"	Número de Octava "O" (Sistema MIDI)										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DO (C)	0	8,1758	16,352	32,703	65,406	130,81	261,63	523,25	1.046,5	2.	4.186,0	8.372,0
DO# (C#)	1	8,6620	17,324	34,648	69,296	138,59	277,18	554,37	1.108,7	2.217,5	4.434,9	8.869,8
RE (D)	2	9,1770	18,354	36,708	73,416	146,83	293,66	587,33	1.174,7	2.349,3	4.698,6	9.397,3
RE# (D#)	3	9,7227	19,445	38,891	77,782	155,56	311,13	622,25	1.244,5	2.489,0	4.978,0	9.956,1
MI (E)	4	10,301	20,602	41,203	82,407	164,81	329,63	659,26	1.318,5	2.637,0	5.274,0	10.548
FA (F)	5	10,913	21,827	43,654	87,307	174,61	349,23	698,46	1.396,9	2.793,8	5.587,7	11.175
FA# (F#)	6	11,562	23,125	46,249	92,499	185,00	369,99	739,99	1.480,0	2.960,0	5.919,9	11.840
SOL (G)	7	12,250	24,500	48,999	97,999	196,00	392,00	783,99	1.568,0	3.136,0	6.271,9	12.544
SOL# (G#)	8	12,978	25,957	51,913	103,826	207,65	415,30	830,61	1.661,2	3.322,4	6.644,9	13.290
LA (A)	9	13,750	27,500	55,000	11	22	44	88	1	3.520,0	7.040,0	14.080
LA# (A#)	10	14,568	29,135	58,270	116,541	233,08	466,16	932,33	1.864,7	3.729,3	7.458,6	14.917
SI (B)	11	15,434	30,868	61,735	123,471	246,94	493,88	987,77	1.975,5	3.951,1	7.902,1	15.804

Según la tabla 1, todas las notas musicales podrán expresarse como un par ordenado de números (N,O), concordante con lo anterior podemos decir que el DO central del piano (C5 para el sistema MIDI) puede notarse como (0,5) visualizándose en la tabla 2 tiene una frecuencia de 261,63 ciclos por segundo.

Las notas del piano convencional (de 88 teclas) establecidas en la tabla 2, van desde A1 (9,1) con 27,5 ciclos/segundo, hasta C9 (0,9) con 4186 ciclos/segundo, con esto podemos deducir que el piano consta de 7 octavas completas más 3 notas al comienzo y una nota adicional al final. Entonces, **la octava numerada en el sistema MIDI como 5, es la cuarta octava completa del piano, lo que hace que se denomine octava 4.**

Aclaración 1. Existen discrepancias con respecto al sistema MIDI, ya que convencionalmente se denomina A4 al LA 440 y C4 al DO central del piano; esta situación es muy común.

Ahora para diferenciar lo anterior, se denominará "O" al número de octava del sistema MIDI y Oc al número de octava del sistema convencional, siendo la relación:

Ecuación 8:

$$O = Oc + 1$$

Reemplazando entonces está en la ecuación 7 (y sustituyendo el 1 por 12/12 para operar simplificando y evitar complicar la expresión), se obtiene:

Ecuación 9:

$$f_{N,Oc} = 440 \cdot 2^{(Oc - \frac{57-N}{12})} \cdot \text{ciclos/segundo}$$

Válida para número de octava Oc (convencional).

Utilizando esta convención, la tabla 2 se transforma de la siguiente forma:

Tabla 3 Frecuencia de las notas en ciclos/segundo o (Hertz) para el sistema convencional.

NOTA	"N"	Número de Octava "									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DO (C)	0	16,352	32,703	65,406	130,81	261,63	523,25	1.046,5	2.093,0	4.186,0	8.372,0
DO# (C#)	1	17,324	34,648	69,296	138,59	277,18	554,37	1.108,7	2.217,5	4.434,9	8.869,8
RE (D)	2	18,354	36,708	73,416	146,83	293,66	587,33	1.174,7	2.349,3	4.698,6	9.397,3
RE# (D#)	3	19,445	38,891	77,782	155,56	311,13	622,25	1.244,5	2.489,0	4.978,0	9.956,1
MI (E)	4	20,602	41,203	82,407	164,81	329,63	659,26	1.318,5	2.637,0	5.274,0	10.548
FA (F)	5	21,827	43,654	87,307	174,61	349,23	698,46	1.396,9	2.793,8	5.587,7	11.175
FA# (F#)	6	23,125	46,249	92,499	185,00	369,99	739,99	1.480,0	2.960,0	5.919,9	11.840
SOL (G)	7	24,500	48,999	97,999	196,00	392,00	783,99	1.568,0	3.136,0	6.271,9	12.544
SOL# (G#)	8	25,957	51,913	103,826	207,65	415,30	830,61	1.661,2	3.322,4	6.644,9	13.290
LA (A)	9	27,500	55,000	110,000	220,00	440,00	880,00	1.760,0	3.520,0	7.040,0	14.080
LA# (A#)	10	29,135	58,270	116,541	233,08	466,16	932,33	1.864,7	3.729,3	7.458,6	14.917
SI (B)	11	30,868	61,735	123,471	246,94	493,88	987,77	1.975,5	3.951,1	7.902,1	15.804

Esta tabla y la ecuación 9 son compatibles con la denominación convencional de C4 para el DO central y A4 para el LA 440, también acorde al sombreado para frecuencias correspondientes a las notas del piano convencional de 88 teclas, y con sombreado más oscuro para el DO central y el LA 440.

La nota LA 440 aparece como asignación de nota absoluta igual a 57 (12 menos que 69 que es el número absoluto que se utiliza en el sistema MIDI) Esto se evidencia comparando las ecuaciones 7 y 9.

Hay que tener en cuenta que la discrepancia enunciada en la Aclaración 1, existe en la convención a utilizar para el número de octava y no para el número relativo de nota "N".

Aclaración 2. Se debe tener en cuenta que los sonidos por debajo de 20 ciclos/segundo no son audibles por el ser humano (se denominan infrasonidos) y lo que se escucha de estas notas, son sus armónicas de frecuencias superiores. Solamente algunos órganos de tubos

muy grandes vinculan estas notas, y son levemente percibidas por el ser humano como una vibración corporal únicamente; se ha comprobado que algunos animales como los elefantes, utilizan eficazmente estos sonidos para comunicarse a grandes distancias. Adicionalmente los militares las utilizan en el sistema ELF (Extremely Low Frequency) para comunicaciones marítimas con submarinos.

Igualmente los sonidos de frecuencias superiores a los 20.000 ciclos/segundo tampoco son detectables por el oído humano y se denominan ultrasonidos y son utilizados por los delfines y los murciélagos.

La voz humana tiene un rango de frecuencias que oscila entre los 80 ciclos/segundo (E2 o MI de la octava 2 convencional), a los 1000 ciclos/segundo (C6 o DO de la octava 6 convencional); un solo ser humano no logra este registro, se debe repartir según corresponda las distintas voces de un coro.

BIBLIOGRAFÍA

- [1], *Entendiendo la Música- Musicología Racional Moderna*
© Alberto Luis Fornasari.
- [2], [Bindel] Bindel, Ernst. "Die Zahlgrundlagen der Musik in Wandel der Zeiten", Verlag Freies Geistesleben 1985.
- [3], [Salvat] "La Música Contemporánea", Colección de Grandes Temas 1974
- [4], [Brown] Grover Brown Robert & Hwang Patrick Y.C. "Introduction to Random signals and applied Kalman filtering" John Wiley and Sons New York 1985.
- [5], [Calvo-Manzano] Calvo- Manzano Antonio "Acústica físico-musical", Real Musical Madrid 1991
- [6], [Canavos] Canavos G. C. "Probabilidad y estadística, aplicaciones y métodos", Mc Graw-Hill, 1991.
- [7], [Copland] Copland, Aaron "Cómo escuchar la música", Fondo de Cultura Económica 1972
- [8], [Dodge] Dodge C. and Jerse T.A. "Computer music: Synthesis, composition, and performance", Schirmer Books, Prentice-Hall
- [9], [Enciclopedia Británica] Enciclopedia Británica (Internet)
- [10], [Fubini] Fubini Enrico "La estética musical desde la Antigüedad hasta el sigloXX", Alianza Música 1976.
- [11], [Estrada] Estrada Julio y Jorge Gil. "Música y Teoría de Grupos Finitos" UNAM 1984.
- [12], [González] César González Ochoa." La música del universo". UNAM México. 1994