



LA TRANSFORMACIÓN DE JOUKOWSKY

THE JOUKOWSKY TRANSFORM

CO. DIEGO GERARDO ROLDÁN
JIMÉNEZ¹

dgroldanj@unal.edu.co

Fecha de Recepción: Febrero 4/2010

Fecha de Aprobación: Junio 4/2010

- 1 Matemático de la Universidad Nacional de Colombia. Docente de la Escuela de Suboficiales FAC. Dirección de Contacto: Prof. D.G. Roldán. Grupo Académico - Escuela de Suboficiales FAC, Madrid, Cundinamarca. Departamento de Matemáticas - Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C.

ABSTRACT

We consider the Joukowski Transform, as a special case of a conformal mapping of the complex variable; also comment on its importance in classical aerodynamics and develop some problems associated with this transformation.

Key words:

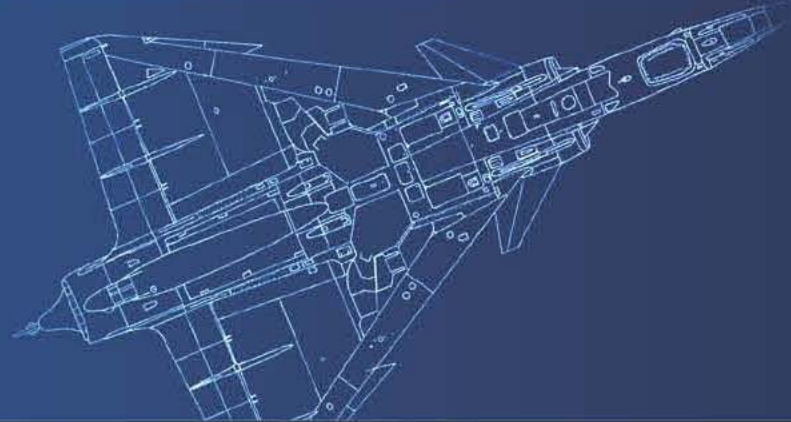
Complex Variable, Aerodynamics, Joukowski Transform.

RESUMEN

Consideramos la Transformación de Joukowski, como caso particular de un Mapeo Conforme de la Variable Compleja; también se comentará su importancia en la Aerodinámica Clásica y desarrollaremos algunos problemas asociados a esta transformación.

Palabras claves:

Variable Compleja, Aerodinámica, Transformación de Joukowski.



INTRODUCCIÓN

El Conjunto de Ecuaciones

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

Define en general una transformación, la cual establece una correspondencia entre puntos del plano xy y el plano uv , estas ecuaciones se llaman ecuaciones de transformación [2]. Si a cada punto del plano uv le corresponde uno y solo uno del plano xy y recíprocamente, decimos que la transformación es biunívoca. Existe un concepto importante que nos permita saber si una transformación es biunívoca que se conoce como el *Jacobiano* de la transformación.

Definición 1. Sea una transformación $[u, v]$ como la mostrada en (1), decimos que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

es el Jacobiano de la transformación.

Si se resuelve (1) para tener x y y en términos de u y v , se obtiene la transformación $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$ que es la transformación inversa de (1). Si x y y son unívocas y continuamente diferenciables, el jacobiano de esta transformación es $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ y se puede demostrar que

es igual al recíproco de $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$. Luego si uno de los jacobianos es distinto de cero, el otro también lo es. Se puede demostrar que si u y v son continuamente diferenciables en una región C , y si el jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ es distinto de cero en C , entonces la transformación (1) es biunívoca.

Aplicación compleja

Es de especial interés en la teoría aerodinámica, cuando en (1) u y v son las partes real e imaginaria de una función analítica de una variable compleja $z = x + iy$, o sea, $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$, en tal caso el jacobiano de la transformación está dado por $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$. Decimos que los puntos donde $f'(z) = 0$ son los puntos críticos de la transformación.

APLICACIÓN CONFORME

Definición 2. Dada una transformación como en (1), tal que un punto (x_0, y_0) del plano xy se aplica en el punto (u_0, v_0) del plano uv . Sean C_1 y C_2 dos curvas cualquiera en xy que se intersectan en (x_0, y_0) , tal que forman un ángulo α , si se aplican en uv como C_1 y C_2 y forman un ángulo α' ; tenemos:

- (i) Si $\alpha = \alpha'$ decimos que la aplicación es conforme.
- (ii) Si $\alpha = \alpha'$ es decir, los ángulos son iguales en magnitud, pero no en sentido, decimos que la aplicación es isogonal.

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de la aplicación conforme, pues nos permite establecer cuando las transformaciones, preservan la simetría de la aplicación.

Teorema 1. Si $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ en una región C , entonces la aplicación $w = f(z)$ es conforme en todos los puntos de C .

Para la demostración del teorema 1, puede consultarse [2]. Por otra parte de la transformación $w = f(z)$ del plano z en el plano w , puede pensarse también como una transformación del plano z en sí mismo, decimos que es una autotransformación. En las *autotransformaciones*, los puntos para los cuales $z = f(z)$ permanecen fijos, los llamamos *invariantes* de la transformación.

Ejemplo 1. Los puntos invariantes de la transformación $w = z^2$ son las soluciones de $z^2 = z$, $z = 0$ y $z = 1$.

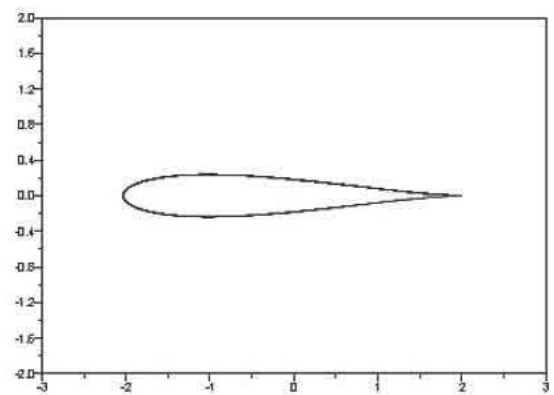
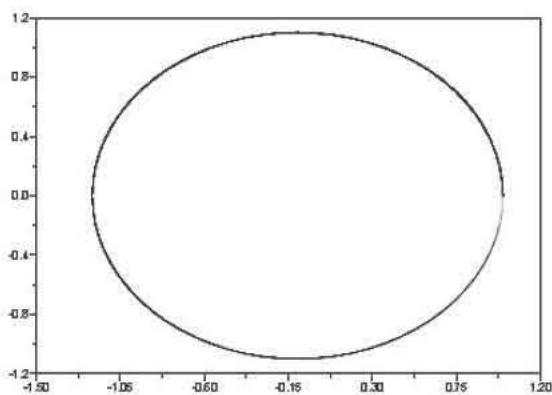


Figura 1. La Transformación de Joukowski se asemeja a un Perfil Aerodinámico.

LA TRANSFORMACIÓN DE JOUKOWSKY

Si consideramos un círculo C en el plano \bar{z} , con centro sobre el eje real la transformación dada por:

$$w = \bar{z} + \frac{b^2}{\bar{z}} \quad b > 0 \quad (3)$$

se conoce como la transformación de *Joukowski*. Tal como lo muestra la Figura 1, esta transformación genera un "contorno de Joukowski" y se parece a la sección transversal de un ala de avión, esto nos permite aproximarnos a la teoría aerodinámica, pues para hallar la solución de un problema de perfiles, basta con remitirnos a la teoría de la variable compleja.

Consideremos el siguiente potencial complejo [3]:

$$W(\bar{z}) = V_\infty \left(\bar{z} - c + \frac{a^2}{\bar{z}-c} \right), \quad a > 0 \quad (4)$$

el cuál describe el flujo de un fluido con un obstáculo circular de radio a y centro $c = \epsilon + i\mu$, donde el obstáculo tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned} (\bar{x} - \epsilon)^2 + (\bar{y} - \mu)^2 &= a^2 \\ \bar{z} &= c + ae^{i\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

Por lo reportado en [3] el campo de velocidad

$$\frac{dw}{dz} = W'(z) = u + iv \quad (6)$$

para (4) está dado por:

$$W'(z) = V_\infty \frac{1 - [a^2/(z-c)^2]}{1 - (b^2/z^2)} \quad (7)$$

Los valores de a , b y c deben ser elegidos de tal forma que estén en la frontera ó dentro de la curva, si está en el interior de la curva no afecta su forma ni el campo de

flujo, pero si está en la frontera este punto se convertiría automáticamente en el borde de fuga del perfil [4].

Una aproximación desde el análisis complejo

En el análisis complejo en ocasiones, la deducción puede resultar más elemental que desde la teoría aerodinámica, esto se debe a que los resultados desde la variable compleja, son consecuencia de algunos postulados o lemas, mientras en la teoría aerodinámica se debe tener precaución pues se está modelando con diversas variables físicas [5]. Para continuar haremos uso del siguiente lema:

Lema 1. Sea $w = f(z)$ una aplicación conforme de tal forma que tiene expansión en series de Taylor alrededor de $a \in xy$:

$$w = f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots + f^n(a)(z-a)^n + \dots \quad (8)$$

Si $f^k(a) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$ y $f^n(a) \neq 0$ entonces los ángulos en el plano xy con vértices en $z = a$ se multiplican por n en el plano uv .

Para la demostración del Lema anterior se puede consultar [5]. Ahora con base en este resultado hallemos la transformación de Joukowski para perfiles con sustentación², entonces consideremos un círculo C con centro en el semiplano superior (e.d $\mu \neq 0$) de tal forma que su frontera coincida con el punto $\bar{z} = 1$ y en su interior se encuentre $\bar{z} = -1$, si consideramos (3) tal que $b = 1$

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{si } \bar{z} = 1 \quad (9)$$

2 Para perfiles 0-sustentación, es suficiente considerar la curva C con centro en el eje x (e.d $\mu = 0$) y hacer el mismo desarrollo mostrado, se puede observar que en 0-sustentación C encierra el círculo $|z| = 1$, de forma que su aplicación es el segmento de $w = -1$ a $w = 1$.

luego $z = 1$ es un punto crítico, si hacemos la expansión en series de Taylor de (3) con $b = 1$ alrededor de $\tilde{z} = 1$

$$w - 1 = (\tilde{z} - 1)^2 - (\tilde{z} - 1)^3 + (\tilde{z} - 1)^4 - \dots$$

por el *Lema* anterior observamos que los ángulos con vértices en $\tilde{z} = 1$, se doblan por la transformación, en particular como el ángulo exterior a $\tilde{z} = 1$ es π el ángulo en $w = 1$, exterior a la transformación C' es 2π . Por esta razón la forma puntiaguda en $w = 1$, por otra parte si C no encierra completamente al círculo $|\tilde{z}| = 1$, la imagen C' no encierra completamente la imagen de $|\tilde{z}| = 1$ que el segmento de $w = -1$ a $w = 1$, los otros puntos de C' se pueden encontrar directamente. (Ver Figura 2).

PERFILES CON SUSTENTACIÓN EN FLUJOS IRROTACIONALES

Consideremos el siguiente potencial complejo:

$$W = V_\infty \left(\tilde{z} + \frac{a^2}{\tilde{z}} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\tilde{z}}{a} \quad (10)$$

el flujo descrito por este potencial complejo es el mismo flujo con un obstáculo circular con circulación Γ y es directo al eje de las \tilde{x} , lejos del origen. Vamos a considerar un ángulo de ataque α de tal forma que $\tilde{z} \rightarrow \tilde{z}e^{-i\alpha}$ de esta forma la ecuación (10) queda de la siguiente forma:

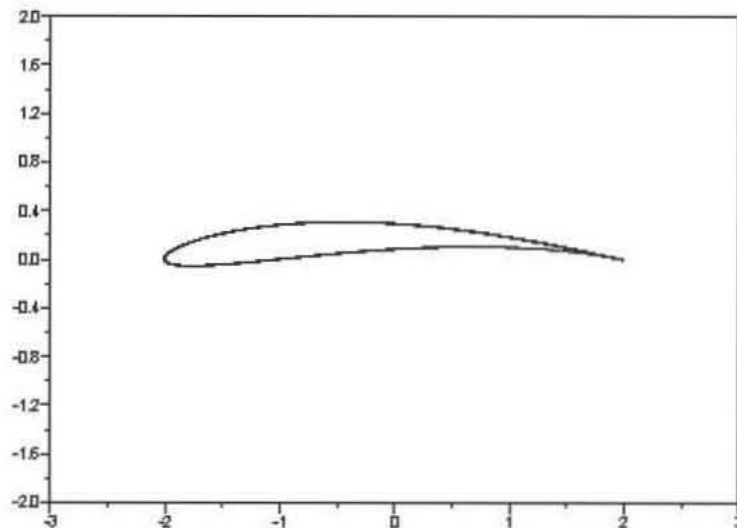


Figura 2. Un Contorno de Joukowski ó C' .

$$W = V_{\infty} \left[\tilde{z} e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\tilde{z} e^{-i\alpha}} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\tilde{z} e^{-i\alpha}}{a}$$

y finalmente fijamos el centro del círculo en $\tilde{z} = c$ y obtenemos:

$$W = V_{\infty} \left[(\tilde{z} - c) e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\tilde{z} - c} \right] + \frac{i\Gamma}{\pi} \ln \frac{(\tilde{z} - c) e^{-i\alpha}}{a} \quad (11)$$

La ecuación (11) corresponde al potencial complejo alrededor de un círculo de radio a y centro c en el plano \tilde{z} , α es el ángulo de ataque del flujo y Γ es la circulación. Sabemos que para el campo de velocidades, hallamos $W'(\tilde{z})$ [7] y sabemos que la condición de Kutta de que la velocidad debe ser finita en el borde de salida en $\tilde{z} = b$, luego se requiere que el numerador de $W'(\tilde{z}) \rightarrow 0$ es decir:

$$0 = V_{\infty} \left[e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(b-c)^2} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(b-c)} \quad (12)$$

de esta forma la circulación Γ está dada por:

$$\Gamma = \frac{-2\pi V_{\infty}}{i} \left[e^{-i\alpha} (b-c) - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(b-c)} \right] \quad (13)$$

y usando (5) la ecuación (13) puede ser simplificada así:

$$\Gamma = 4\pi V_{\infty} [(b - \epsilon) \sin \alpha + \mu \cos \alpha] \quad (14)$$

y utilizando el teorema de *Kutta - Joukowski*

$$L' = \rho V_{\infty} \Gamma \quad (15)$$

luego reemplazando (14) en (15) obtenemos:

$$L' = \rho V_{\infty}^2 \Gamma [(b - \epsilon) \sin \alpha + \mu \cos \alpha] \quad (16)$$

así concluimos que el coeficiente de sustentación³ está dado por:

$$C_L = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 4a} = 2\pi [(b - \epsilon) \sin \alpha + \mu \cos \alpha] \quad (17)$$

Ejemplo 2. Considere el caso $\epsilon = \mu = 0$, entonces las ecuaciones en (5) implican que $a = b, c = 0$ y $\tilde{z} = a e^{i\theta}$, entonces de la ecuación (3) la línea de corriente $\psi = 0$ está dada por:

$$z = a e^{i\theta} + a e^{-i\theta}$$

es decir

$$z = 2a \cos \theta$$

cuya parte real varía desde $-2a$ hasta $2a$, y cuya parte imaginaria es 0, es decir es el segmento de línea desde $-2a$ hasta $2a$, la circulación está dada por

$$\Gamma = 4a\pi V_{\infty} \sin \alpha \quad (18)$$

3 Suponiendo que para perfiles de mínimo espesor la cuerda es aproximadamente $4a$.

Observaciones

De las ecuaciones (16) y (17) podemos observar que la teoría puede predecir valores de sustentación hasta $\alpha = \pi/2$, a pesar de que esto no se cumpla en la vida real, pues para ángulos de ataque mucho menores se presenta el fenómeno del desprendimiento de la capa límite y esta teoría pierde validez [8]. Además el cálculo de flujo predice una fuerza resultante nula en la dirección de la corriente (resistencia nula), esto se debe principalmente a que la teoría del flujo potencial ignora los efectos viscosos del fluido y es una limitación común a todo cálculo de perfiles basados en esta teoría.

REFERENCIAS

- *J. Anderson: Fundamentals of Aerodynamics, McGraw-Hill Inc. (1991).*
- *E. Churchill. Variable Compleja, Springer. (1998).*
- *J. Moran. An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics. J. Willey and Sons (1984).*
- *J. Anderson: Introduction to Flight, Academic Press, New York, (1976).*
- *A. Kuethe and Chow, Foundations of Aerodynamics, 3rd ed. J. Willey New York, (1976).*
- *W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Book Co. (1966).*
- *D.G. Roldán, Métodos de Variable Compleja en Aerodinámica Teórica, Working Paper (2010).*

